**Метод гармонической линеаризации нелинейных характеристик**

Метод гармонической линеаризации является приближенным, полученным в результате распространения частотных методов на исследование нелинейных систем [1,3,5,6,7].

         Предложено несколько разновидностей применения гармонической линеаризации (метод гармонического баланса Н. И. Крылова и                        Н. Н Боголюбова, метод Б. В. Булгакова), но все они близки между собой. В основу этих разновидностей положены частотная или гармоническая линеаризация нелинейностей и понятие об эквивалентном коэффициенте усиления нелинейного элемента.

Метод гармонической линеаризации позволяет:

-     определить условия устойчивости нелинейной системы (найти значения изменяемых параметров, при которых система будет устойчива);

-     определить возможные автоколебания в системе;

-     найти частоту и амплитуду автоколебаний.

Применение метода возможно при условии, что характеристики элементов не меняются с течением времени и что выходная величина нелинейного элемента зависит от значений входной величины и не зависит от ее производных и интегралов.

Сущность гармонической линеаризации состоит в следующем. Предположим, что имеется нелинейный элемент, в котором зависимость между выходной и входной величинами представляет нелинейную функцию вида

                                                                                         (1.21)

т.е. выходная величина в общем случае является нелинейной функцией входной величины и ее производной. Подадим на вход нелинейного элемента гармонического воздействие

                                                                                                        (1.22)

тогда                                                   .                                       (1.23)

Подставим значения *x1* и *px1* из выражений (1.22) и (1.23) в выражение (1.21) и заменив *ωt = ψ*, получим

                                                                          (1.24)

Это сложная периодическая функция, содержащая гармонические составляющие с частотами, увеличивающимися до бесконечности. Разложив правую часть выражения (1.24) в ряд Фурье, получим

 высшие гармоники.         (1.25)

Первое слагаемое в приведенном разложении представляет собой постоянную составляющую. В наиболее распространенных нелинейностях постоянная составляющая отсутствует, и поэтому в дальнейшем будем считать первое слагаемое равным нулю. Можно провести линеаризацию и в том случае, если постоянная составляющая не равна нулю. Этот вопрос рассмотрен в [1,3,5]. Высшие гармоники разложения отбрасываются, и во внимание принимается только первая (основная) гармоника разложения.  Это вносит погрешность в окончательный результат, однако в практических расчетах она, как правило, допустима, поскольку в реальных системах автоматического регулирования линейная часть является фильтром низких частот, т. е. такой динамической системой, которая пропускает только низкие частоты. Высокие частоты гасятся элементами, содержащими индуктивности, механические массы и т. п., и ими можно пренебречь.

Из выражений (1.22) и (1.23) получим

                                                                           (1.26)

Обозначим через  и  коэффициенты первой гармоники разложения (1.25), деленные на А будут:

|  |
| --- |
|  |
|  |  |

 (1.27)

Учитывая сказанное выше и применяя обозначения (1.26) и (1.27), выражение (1.25) может быть переписано в виде

                                                                              (1.28)

Выражение (1.28) является линейным. Таким образом, гармоническая линеаризация заключается в том, что нелинейная функция вида (1.21) с точностью до высших гармоник заменяется линейной функцией вида (1.28).

Выражение

                                                                            (1.29)

по аналогии с коэффициентом при *x1* в  частотном анализе линейных систем называется приближенной передаточной функцией нелинейного элемента.

Если в выражении (1.29) заменить  на  при то получим приближенное значение эквивалентного комплексного коэффициента усиления нелинейного элемента

                                                                                (1.30)

или в показательной форме

                                                                                           (1.31)

Здесь

                                                                                      (1.32)

модуль эквивалентного комплексного коэффициента усиления, а его аргумент

                                                                               (1.33)

Таким образом, эквивалентным комплексным коэффициентом усиления нелинейного элемента называется комплексное число, модуль которого представляет отношение амплитуды первой гармоники на выходе нелинейного элемента к амплитуде синусоидального воздействия на его входа, а аргумент – разность фаз первой гармоники на выходе и синусоидального воздействия на входе. При изменении амплитуда и частота синусоидального воздействия на входе значение эквивалентного комплексного коэффициента усиления  меняется.

В настоящее время коэффициенты разложения в ряд Фурье g(A) и b(A) для значительного количества нелинейностей вычислены, что облегчает применение метода гармонической линеаризации. На рисунке 1.7 приведены нелинейные характеристики, для которых коэффициенты разложения имеют следующий вид:

– для характеристики на рисунке 1.7, *а*

     

– для характеристики на рисунке 1.7, *б*

         

– для характеристики на рисунке 1.7, *в*

                        ;  ;

– для характеристики на рисунке 1.7,*г*

                                    

Буквенные обозначения, приведенные в формулах, ясны из рисунка 1.7.



 Рисунок 1.7 - К определению коэффициентов гармонической линеаризации нелинейных элементов

Ограничение справедливости формул условием  имеет тот смысл, что если амплитуда А входной синусоиды будет меньше половины зоны нечувствительности *а*, то нелинейный элемент не сработает и движение в системе будет отсутствовать. Поэтому все расчеты начинаются с предельного значения . Обращаем внимание на то, что если нелинейная характеристика однозначна, не имеет гистерезиса, то коэффициент и эквивалентный комплексный коэффициент усиления, вычисленный по формуле (1.30), будет числом вещественным.

Рассмотрим систему автоматического  регулирования, состоящую из нескольких линейных звеньев и одного нелинейного. Все линейные звенья могут быть объединены в один эквивалентный линейный элемент, и тогда структурная схема примет вид, изображенный на рисунке 1.8.



 Рисунок 1.8 - Структурная схема системы с нелинейным элементом

 Рассмотрим нелинейный элемент. Предположим, что на его вход подано синусоидальное воздействие

 

 Тогда, пользуясь гармонической линеаризацией, находим эквивалентный коэффициент усиления и с точностью до высших гармоник можем определить выходную величину:

                                                                                                        (1.34)

Рассмотрим линейную часть. Обозначив ее передаточную функцию через W(p), получим уравнение в оперативной форме:

                                                                                                      (1.35)

В частном случае, когда величина *x2* является гармонической функцией с неизменными амплитудой *А1* и  частотой *ω*, она может быть представлена в показательной форме

                                                                                                          (1.36)

Установившееся значение на выходе линейного элемента при этом будет равно

                                                                                           (1.37)

Здесь  называется комплексным коэффициентом усиления части,получающимся из *W(p)*, если вместо  подставить .

В соответствии с уравнением (1.37) на выходе линейной части получаются также гармонические колебания, отличающиеся от  по амплитуде и фазе, причем это отличие полностью определяется комплексным коэффициентом усиления

      .

Модуль  представляет собой отношение выходной амплитуды к входной, аргумент - разность фаз выходной и входной синусоид. Для линейной части комплексный коэффициент изменяется при изменении частоты, но не зависит от амплитуды входного сигнала.

Рассмотрим теперь систему в целом. Предположим, что система находится на грани устойчивости, и в ней возникли незатухающие колебания с частотой  и амплитудой на входе нелинейного элемента . Тогда уравнения системы в соответствии с выражениями (1.34), (1.35) и       рисунком 1.8 будут иметь вид:

                                                         (1.38)

Исключая из этих уравнений  и , получим

                                             .                                  (1.39)

Так как в системе происходят незатухающие колебания, то  и, следовательно

                                                                                            (1.40)

Это – уравнение свободных колебаний системы. Левая часть уравнения является комплексной величиной. Приравнивая отдельно ее вещественную и мнимую части нулю, получим два уравнения с двумя неизвестными: частотой  и амплитудой . Если в результате решения этих уравнении получаются вещественные числа, то в системе возможны колебания с найденными частотой и амплитудой. Если при решении получаются мнимые числа, то колебания в системе невозможны, система устойчива. Проще и нагляднее это решение произвести графически.

Перепишем уравнение (1.40) следующим образом

                                                                                         (1.41)

Левая часть уравнения при изменении частоты  от 0 до  представляет амплитудно-фазовою частотную характеристику линейной части системы в разомкнутом состоянии.

Правая часть уравнения при изменении амплитуды от 0 или от  до  представляет обратную амплитудную характеристику нелинейного элемента системы регулирования. Обе характеристики могут быть вычерчены в одной системе координат. Точка пересечения характеристик дает решение уравнения (1.41). При этом частота колебаний определяется частотой на амплитудно-фазовой характеристике в точке пересечения кривых, а амплитуда колебаний определяется значением амплитуды на амплитудной характеристике нелинейного элемента в той же точке (см. рисунок 1.9, *а*).



Рисунок 1.9 - Графическое решение линейного и линеаризованного уравнений

Если амплитудно-фазовая характеристика линейного элемента и амплитудная характеристика нелинейного элемента не пересекаются           (см. рисунок 1.9, *б*), то в системе автоколебания невозможны. Если указанные кривые касаются друг друга (см. рисунок 1.9, *в*), то система (приближенно) находится на границе устойчивости.

Имея амплитудную характеристику линейного элемента, можно так выбрать параметры линейной части системы, чтобы указанные кривые не пересекались и следовательно, система была устойчивой.

Устойчивость колебаний в системе можно оценить следующим способом, который не является достаточно строгим, но в большинстве случаев дает правильные результаты. Дадим небольшое приращение амплитуде колебаний в точке *В* (см. рисунок 1.9,*а*). При положительном приращении +*∆А*на обратной амплитудной характеристике получим, например, точку , а при отрицательном приращении - *∆А* – точку .

Если амплитудно-фазовая характеристика устойчивой разомкнутой линейной части не охватывает точку , соответствующую положительному приращению амплитуды *∆А*, и охватывает точку , соответствующую отрицательному приращению амплитуды *∆А*, то автоколебания будут устойчивы.  В соответствии с этим определением автоколебания в точке  *В,*где на рисунке 1.9, *а*– устойчивы, а в точке *С* – неустойчивы.

Метод гармонической линеаризации позволяет правильно выбрать параметры изменяемой части нелинейной системы. Метод гармонической линеаризации применим и при наличии в системе нескольких нелинейности при различном их сочетании с линейными звеньями.